Tentamen

Elektriciteit en Magnetisme 1

Vrijdag 9 juli 2010

14:00-17:00

Schrijf op *elk* vel uw naam en studentnummer.

Schrijf leesbaar.

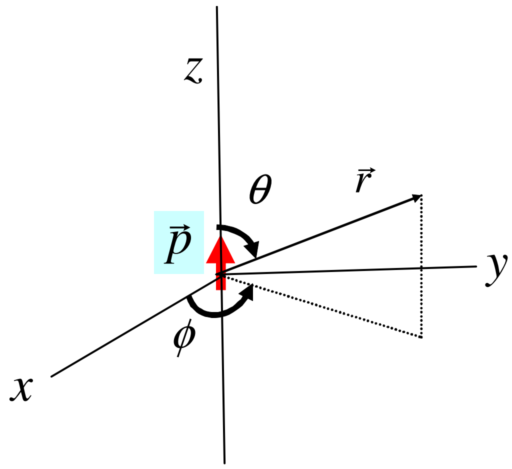
Maak elke opgave op een *apart* vel.

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen. Alle vier vragen hebben een gelijk gewicht.

OPGAVE 1

Een elektrische dipool bevindt zich in de oorsprong (0, 0, 0) (zie figuur). Het dipoolmoment wordt gegeven door $\vec{p} = p\hat{z}$. Als we veronderstellen dat we de dipool kunnen beschrijven als een mathematische (of pure) dipool dan wordt de potentiaal gegeven door

$$V_{dip}(r,\theta) = \frac{\hat{r}\cdot\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



a) Leg uit wat bedoeld wordt met een ‘mathematische’ dipool.

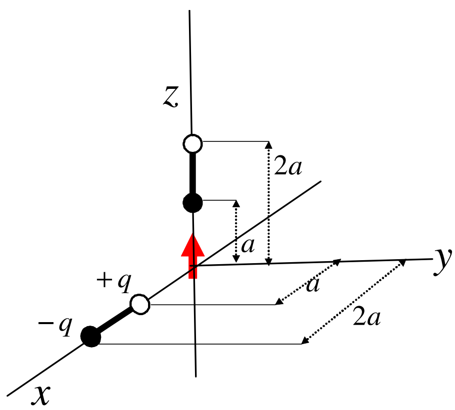
b) Gebruik de potentiaal om aan te tonen dat het elektrische veld gegeven wordt door

$$\vec{E}_{dip}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$$

c) Bereken de grootte en richting van de kracht op een lading $+q$ op de y-as in het punt (0, a, 0). Geef een uitdrukking in bolcoördinaten en een uitdrukking in cartesische coördinaten.

d) Doe hetzelfde voor een lading $+q$ in punt $(\frac{1}{2}a\sqrt{2}, \frac{1}{2}a\sqrt{2}, a)$.

e) Stel nu dat we (naast de mathematische dipool in de oorsprong) ook een fysische dipool hebben die langs de x-as ligt (zie onderstaande figuur) met een lading q in het punt (a, 0, 0) en een lading $-q$ in het punt ($2a$, 0, 0). Hoeveel energie kost het om deze fysische dipool op de z-as te brengen met de negatieve lading in het punt (0, 0, a) en de positieve lading in het punt (0, 0, $2a$).

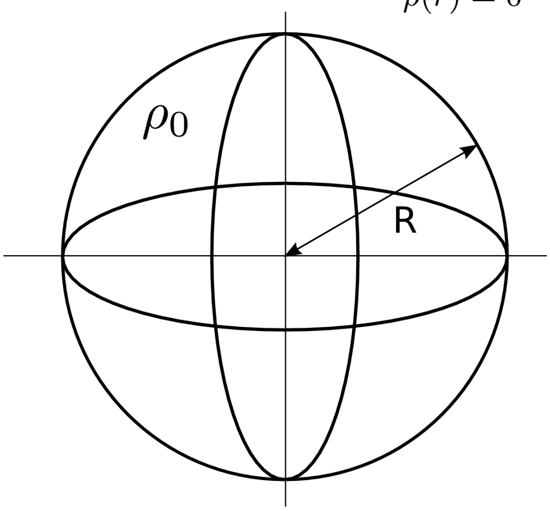


OPGAVE 2

Gegeven is een bol met straal R. De bol heeft een uniforme volumeladingsdichtheid ρ_0 (zie onderstaande figuur).

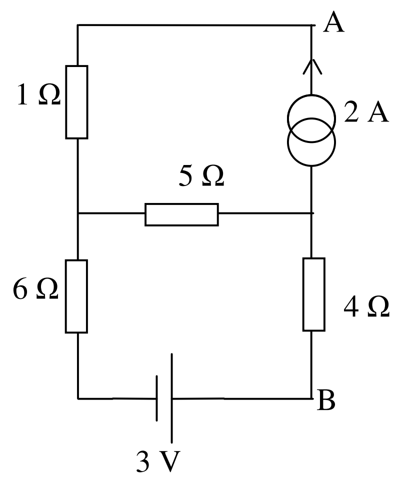
a) Bereken het elektrische veld buiten en binnen de bol.
b) Bereken de potentiaal buiten en binnen de bol. Kies zelf een geschikt nulpunt voor de potentiaal.

$$\rho(r) = \rho_0 \quad r \leq R$$
$$\rho(r) = 0 \quad r > R$$



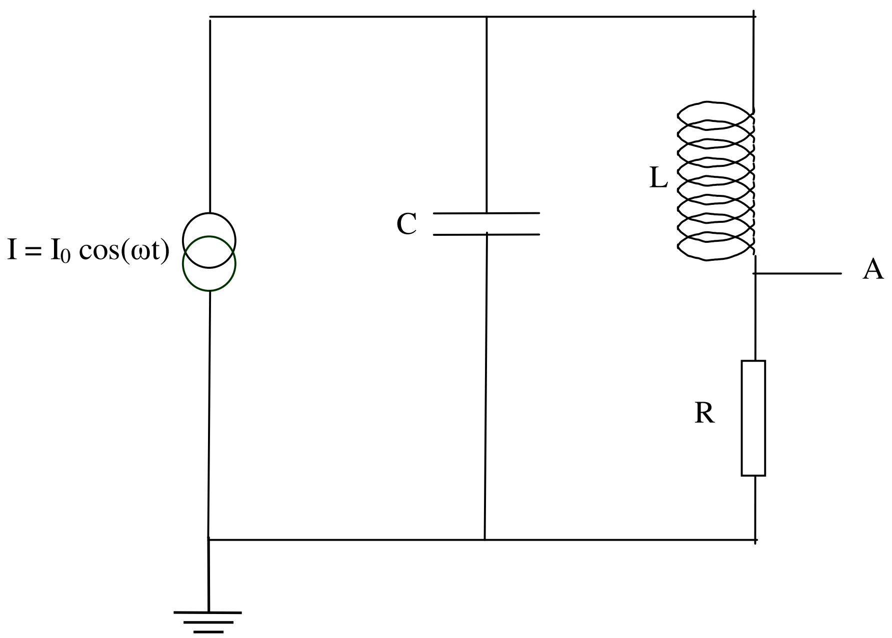
OPGAVE 3

a) Gegeven is de hiernaast getekende schakeling.
Bereken het spanningverschil tussen A en B.



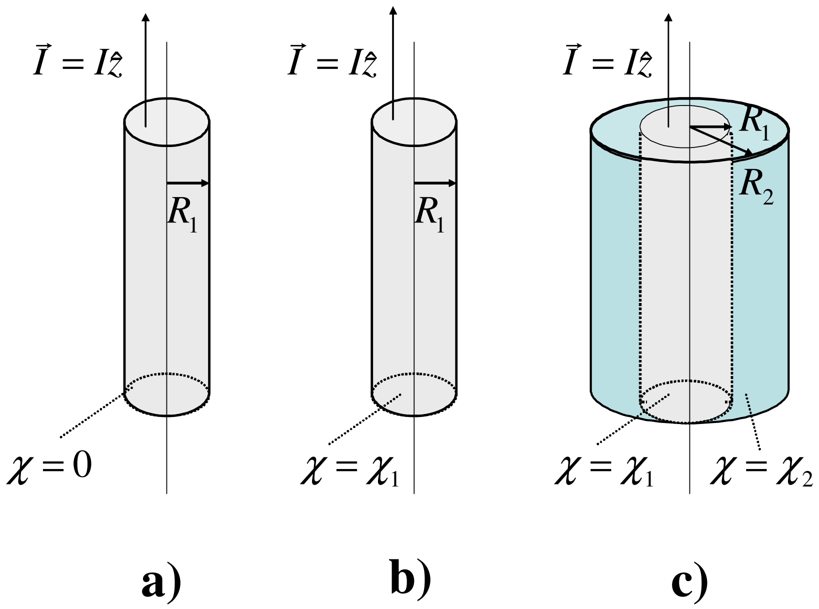
b) Gegeven is de hieronder getekende schakeling.
I is een stationaire wisselstroombron die in de reële schrijfwijze beschreven wordt door $I = I_0 \cos(\omega t)$.

(i) Bereken de spanning in het punt A in de complexe schrijfwijze.
(ii) Geef de spanning in het punt A in de reële schrijfwijze.



OPGAVE 4

Een stroom $\vec{I} = I\hat{z}$ gaat door een cilindervormige niet-magnetische draad met straal R_1 (zie figuur a).



a) Stel dat de stroom uniform verdeeld is over de *buitenkant* van de draad. Bepaal de grootte en richting van het magneetveld $\vec{B}$ binnen en buiten de draad.

b) Stel dat de stroom uniform verdeeld is over het volume van de draad. Bepaal de grootte en richting van het magneetveld $\vec{B}$ binnen en buiten de draad.

c) Stel dat de stroom uniform verdeeld is over het volume van de draad en dat de draad bestaat uit een lineair magnetisch materiaal met magnetische susceptibiliteit χ_1 (zie figuur b). Bepaal de grootte en richting van het hulpveld $\vec{H}$ (Griffiths: 'auxiliary field') en het magneetveld $\vec{B}$ binnen en buiten de draad.

d) Stel dat in de situatie van c) de draad omringd wordt door een holle cilinder (binnenstraal R_1 en buitenstraal R_2) die bestaat uit lineair magnetisch materiaal met magnetische susceptibiliteit χ_2 (zie figuur c). Bepaal grootte en richting van de magnetisatie $\vec{M}$ in deze holle cilinder.

e) Bepaal de gebonden oppervlaktestroom $\vec{K}_b$ en de gebonden volumestroom $\vec{J}_b$ in deze holle cilinder en laat zien dat de totale gebonden stroom in de holle cilinder nul is.

Uitwerking

OPGAVE 1

Onderdeel a)
Een mathematische of pure dipool is een abstractie van een fysische dipool waarbij de afstand d tussen de lading naar nul gaat, de grootte van de ladingen q naar oneindig gaat terwijl het product $p = dq$ (het dipoolmoment) constant blijft.

Onderdeel b)
Zie boek pagina 153, gebruik $\vec{E} = -\nabla V$ in bolcoördinaten

$$E_{dip,r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_{dip,r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_{dip,\phi} = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

Onderdeel c)

Gebruik $\vec{F}(0, a, 0) = q\vec{E}_{dip}(0, a, 0)$

Op de y-as geldt $\theta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta = 1 \wedge \cos\theta = 0$ en dus (gebruik gegeven formule voor het dipoolveld)

$$\vec{F}(0,a,0) = q\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{\theta}$$

en met $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} = -\hat{z}$ volgt

$$\vec{F}(0,a,0) = -q\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\hat{z}$$

Onderdeel c)

Gaat idem als onderdeel c maar dan iets meer rekenen.

$$\vec{F}(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, a) = q\vec{E}_{dip}(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, a)$$

In het punt geldt $\theta = \frac{\pi}{4} \wedge \phi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\theta = \sin\phi = \cos\phi = \cos\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$ en ook $r = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$ en dus

$$\vec{F}(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, a) = q\frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}p}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^3}(2\hat{r} + \hat{\theta})$$

En met

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z} = \tfrac{1}{2}\hat{x} + \tfrac{1}{2}\overline{y} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}$$

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} = \tfrac{1}{2}\hat{x} + \tfrac{1}{2}\hat{y} - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z}$$

wordt dit

$$\vec{F}(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}, a) = q\frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{2}p}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 a^3}(\tfrac{3}{2}\hat{x} + \tfrac{3}{2}\hat{y} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\hat{z})$$

Onderdeel d)

$\Delta E = W = +q\left[V(0, 0, 2a) - V(a, 0, 0)\right] - q\left[V(0, 0, a) - V(2a, 0, 0)\right]$ en dus

$$\Delta E = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p}{4a^2} - 0 - \frac{p}{a^2} + 0\right] = -\frac{3pq}{16\pi\varepsilon_0 a^2}$$

OPGAVE 2

Zie opgave 2.21 van het boek. Om het veld buiten de bol te berekenen gebruiken we de wet van Gauss:

$$\oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\mathrm{ENC}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau$$

$$Q_{\mathrm{ENC}} = q_{\mathrm{tot}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$$

Gebruik nu bolsymmetrie: $\vec{E} = E_r$, en constant over hele oppervlak van de bol.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\mathrm{ENC}} \\
&\Leftrightarrow E_r 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \\
&\Leftrightarrow E_r = \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2} \\
&\Leftrightarrow \vec{E}_{\mathrm{buiten}} = \frac{R^3 \rho_0}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{q_{\mathrm{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}
\end{aligned}$$

Om het veld binnen de bol te berekenen gebruiken we wederom de wet van Gauss. De omsloten lading is nu anders:

$$Q_{\mathrm{ENC}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 = q_{\mathrm{tot}} \frac{r^3}{R^3}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\mathrm{ENC}} \\
&\Leftrightarrow E_r 4\pi r^2 = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\epsilon_0} \\
&\Leftrightarrow E_r = \frac{r \rho_0}{3\epsilon_0} \\
&\Leftrightarrow \vec{E}_{\mathrm{binnen}} = \frac{r \rho_0}{3\epsilon_0}\hat{r} = \frac{q_{\mathrm{tot}} r}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{r}
\end{aligned}$$

Kies het nulpunt van de potentiaal in oneindig.

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Bereken eerst de potentiaal buiten de bol.

$$\Leftrightarrow V(r > R) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E}_{\text{buiten}} \cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{r} \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr$$

$$\Leftrightarrow V(r > R) = \frac{R^3\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{1}{r} = \frac{q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Voor de potentiaal binnen de bol splitsen we de integraal op in 2 delen, buiten en binnen.

$$\Leftrightarrow V(r \leq R) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}_{\text{buiten}} \cdot d\vec{l} - \int_{R}^{r} \vec{E}_{\text{binnen}} \cdot d\vec{l}$$

$$\Leftrightarrow V(r \leq R) = \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\int_{R}^{r} r dr = \frac{R^2\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow V(r \leq R) = \frac{R^2\rho_0}{6\epsilon_0}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{q_{\text{tot}}}{8\pi\epsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

OPGAVE 3

Onderdeel a)
Definieer stromen I_1 door 5 Ω weerstand naar rechts en I_2 door 6 Ω weerstand naar beneden. Pas wetten van Kirchhoff toe.

K1: $2 = I_1 + I_2$
K2: $-6I_2 + 3 - 4I_2 + 5I_1 = 0$

Oplossen van dit stelsel vergelijkingen levert:

$$-6I_2 + 3 - 4I_2 + 5(2 - I_2) = 0$$
$$-15I_2 + 13 = 0$$
$$I_2 = \tfrac{13}{15}A$$
$$I_1 = \tfrac{17}{15}A$$

We kunnen V_{AB} nu uitrekenen via ($I_0 = 2A$, de stroom van de stroombron) ,

$$V_A - 1I_0 - 6I_2 + 3 = V_B$$
$$V_{AB} = V_B - V_A = -2 - \tfrac{78}{15} + 3 = -4\tfrac{1}{5}V$$

Of via het andere pad

$$V_A - 1I_0 - 5I_1 + 4I_2 = V_B$$
$$V_{AB} = V_B - V_A = -2 - \tfrac{85}{15} + \tfrac{52}{15} = -4\tfrac{1}{5}V$$

Onderdeel b)
Kies de stroomrichting uit de stroombron (Stoom I) naar boven en de stromen vanuit het bovenste knooppunt door de condensator (van boven naar beneden) en de spoel (ook van boven naar beneden), respectievelijk I_1 en I_2.

Pas de wetten van Kirchhoff toe.

K1: $I = I_1 + I_2$
K2: $-I_1Z_C + Z_RI_2 + Z_LI_2 = 0$

Combineren van deze twee vergelijkingen

$$-(I - I_2)Z_C + Z_RI_2 + Z_LI_2 = -IZ_c + I_2(Z_C + Z_R + Z_L) = 0$$

$$I_2 = I \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C}$$

En dus voor de spanning in punt A in de complexe schrijfwijze,

$$V_A = I_2 R = I \frac{R Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C} = I \frac{-\frac{iR}{\omega C}}{R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}} = I \frac{\frac{R}{\omega C}}{\frac{1}{\omega C} - \omega L + iR}$$

Voor de overgang naar de reële schrijfwijze bepalen we modulus en het argument van V_A

$$|V_A| = I_0 \frac{\frac{R}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2}}$$

$$\arg(V_A) = 0 - \tan^{-1}\left(\frac{R}{\left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)} \right) = \varphi$$

En in de reële schrijfwijze krijgen we dan,

$$V_A(t) = I_0 \frac{\frac{R}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C} - \omega L)^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

OPGAVE 4

a) Gebruik wet van Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$ en realiseer dat er alleen stroom is over de buitenkant van de draad, dus geen omsloten stroom in de draad.

$$s < R_1; \quad 2\pi s B = 0; \quad \Rightarrow \vec{B} = 0$$

$$s > R_1; \quad 2\pi s B = \mu_0 I; \quad \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}$$

b) Idem maar nu voor uniforme verdeling stroom over volume, dus nu wel omsloten stroom in de draad.

$$s < R_1; \quad 2\pi s B = \mu_0 I \frac{\pi s^2}{\pi R_1^{\ 2}}; \quad \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I s}{2\pi R_1^{\ 2}}\hat{\phi}$$

$$s > R_1; \quad 2\pi s B = \mu_0 I; \quad \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}$$

c) Gebruik nu wet van Ampère voor het hulpveld $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}^{free}$ en realiseer dat het nu gaat om de omsloten *vrije* stroom.

$$s < R_1; \quad 2\pi s H = I \frac{\pi s^2}{\pi R_1^{\ 2}}; \quad \Rightarrow \vec{H} = \frac{Is}{2\pi R_1^{\ 2}}\hat{\phi}$$

$$s > R_1; \quad 2\pi s H = I; \quad \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi s}\hat{\phi}$$

Voor $\vec{B}$ geldt $\vec{B} = \mu_0(1+\chi_1)\vec{H}$ dus (buiten de draad is $\chi_m = 0$)

$$s < R_1; \ \vec{B} = \frac{\mu_0(1+\chi_1)Is}{2\pi R_1^{\ 2}}\hat{\phi}$$

$$s > R_1; \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\phi}$$

d) $R_1 < s < R_2; \ \vec{M} = \chi_2 \vec{H} = \dfrac{\chi_2 I}{2\pi s}\hat{\phi}$

e) $\vec{K}_b(R_1) = \vec{M}(R_1)\times\hat{n} = \vec{M}(R_1)\times(-\hat{s}) = \dfrac{\chi_2 I}{2\pi R_1}\hat{\phi}\times(-\hat{s}) = \dfrac{\chi_2 I}{2\pi R_1}\hat{z}$

$$\vec{K}_b(R_2) = \vec{M}(R_2)\times\hat{n} = \vec{M}(R_2)\times\hat{s} = \frac{\chi_2 I}{2\pi R_2}\hat{\phi}\times\hat{s} = \frac{\chi_2 I}{2\pi R_2}(-\hat{z})$$

$$\vec{J}_b(R_1) = \nabla\times\vec{M} = 0$$

En voor de totale stroom in de holle cilinder geldt,

$$I = 2\pi R_1 K_b(R_1) + 2\pi R_2 K_b(R_2) = 0$$